МАКСИМІЗАЦІЯ АДЕКВАТНОСТІ ЯК ІНСТРУМЕНТ ФОРМУВАННЯ ТА УДОСКОНАЛЕННЯ МОДЕЛІ

УДК 519.87:[517.951+517.5]

ТРУНОВ Олександр Миколайович
перший проректор, кандидат технічних наук, доцент кафедри медичних приладів та систем
Чорноморського державного університету ім. Петра Могили,
Коло наукових інтересів: робототехніка, сенсорна техніка, автоматизовані системи керування, математичне моделювання нелінійних об'єктів та систем.
E-mail: ant@kma.mk.ua, trunovalexandr@gmail.com.

ВСТУП

Обмеження матеріальних, технічних фінансових та часових ресурсів під час проектування систем керування складними об'єктами [1] та вимога побудови їх з високим ступенем інтелектуальності [2-3], формує наряду з вимогою синтезу нових законів керування [2], вимогу до творення моделей [3-6], адекватних задачам, що розв'язуються [2-10] і методів побудови нових [1,3,5,6] та удосконалення існуючих [11,12]. Останнє викликано не стільки складнощами самих об'єктів та процесів керування, скільки суттєвим збільшенням кола та різноманітності задач [4-7], а також ефективністю застосування елементів інтелектуального аналізу [7, 10], зменшення розмірності, впровадження інтервальних експертних оцінок [4,8] та інтервальних обчислень у процесі прийняття рішень, формування керуючих впливів [6,9]. Безумовна важливість та актуальність проблеми народжує чисельні публікації [11,12], що описують засоби побудови та спрощення моделей у відповідності до вимог задачі [13, 14]. Однак, у той же час у них не спостерігаються обґрунтовані алгоритми, що придатні для автоматизації або до по крокового удосконалення та подання їх у вигляді послідовностей, що збігаються. Введений у [13] аналітичний інструмент для єдиного кількісного аналізу містить можливості для реалізації ідеї аналітичного удосконалення моделі.

АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Синтез моделей як простих об'єктів [3,9] так і централізованих ієрархічно структурованих виробничих систем [1,4-7], до складу яких входять керуючий центр з підпорядкованими функціонально з'єднаними виробничими підрозділами, є процесом інтелектуальної діяльності [1,4]: виділення основних характерних рис [5,6]; аналізу просторів і форм їх представлення; формування структури; визначення норм [4,9]; вибору або побудови методології якісного та кількісного порівняння [8]; подальшої трансформації відповідно до мети їх застосування [10,11-12]. Так, наприклад, задача прецизійного математичного моделювання полів, що створюються та контролюються за допомогою первинних перетворювачів у випадку, коли інформацію про функцію задано таблицею розв'язується інтерполяційними методами. Частковим випадком її реалізації є поліноміальна та раціональна інтерполяція [11-12]. Іншим варіантом її розв'язку – є середньоквадратичне наближення, що здійснюється шляхом мінімізації суми квадратів відхилень [9, 11, 13, 14]. У випадку коли функція перетворення задана складним аналітичним виразом, для наближення застосовують розклад у ряд Тейлора [12] або Фур'є. Головною перевагою інтерполювання та середньоквадратичних наближень є обчислювальна простота, яка сприяє їх поширенню у багатьох застосуваннях. Однак, у більшості випадків виникає необхідність побудови наближень, які зменшують відхилення від представленої за допомогою таблиці чи аналітичним виразом функції до наперед заданого значення величини похибки. Постановка цієї задачі як оптимізаційної на заданому інтервалі забезпечує найкраще чебишевське наближення. Крім того, відомо, завдяки роботам, які присвячені розробці теорії та методів наближення багаточленами, раціональними, нелінійними виразами та сплайн-функціями та достатньо повно описані у [11-12,14], що використання поліномів та раціональних багаточленів при реалізації на практиці ускладнюється обчислювальною громіздкістю. Останнє зумовлено високим порядком поліному та необхідністю застосування нелінійних чебишевських наближень. Слід зазначити, що не зважаючи на свою прогресивність підхід, запропонований Б.О. Поповим [11-12], що базується на понятті ядра наближення, за допомогою якого можна оцінити похибку чебишевського наближення без обчислення його параметрів не знімає проблему вибору функції та громіздкості обчислень у цілому.

Однак, вид апроксимуючої функції у них обирається хоч і виходячи із властивостей наближуваної функції, але по-перше враховуються тільки властивості самої функції, а не її похідних, по-друге він обирається, а не знаходиться або доводиться. Таким чином, як це наголошувалось у роботі [13], розв'язується задача тільки наближення наперед обраної функції, а не пошуку аналітичного виду функції та обчислення коефіцієнтів, що її максимально наближують до заданої за умов мінімізації максимальної похибки або інших видів її норм [13]. У зв'язку з цим слід зазначити, що задача побудови науково обґрунтованого алгоритму формування виразу моделі у аналітичній формі з урахуванням властивостей функції та її похідних є головною нерозв'язаною проблемою. Таким чином, теоретичне доведення, що ідея аналітичного удосконалення моделі за допомогою критерію адекватності, сформованого у роботі [13], як єдиний кількісний інструмент, врахує властивості об'єкту-функції разом із її похідними і утворить підґрунтя для інформаційної технології побудови бази знань. Разом з тим, враховуючи відповідно до висновків [13], що використання відносних змінних з локальною мірою у кожній точці збільшує чутливість оцінки до будь яких точкових відхилень моделі від поведінки об'єкту та відповідає якісним її змінам при зменшенні відносних відхилень, як за показником адекватності похідної, так і результуючого показника при апроксимації не тільки фізичної величини, а й її похідних, розглядатиме далі у цій статті критерій адекватності з локальною мірою.

МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою дослідження є формування умов за яких адекватність моделі є максимально можливою для даного класу функцій.

Для досягнення поставленої мети поставимо наступні задачі:

- Формування вимог до моделі та встановлення зв'язку між моделлю, її похідними та об'єктом.

- Побудова рекурентних співвідношень, що удосконалюють модель у обраному класі функцій.

Розв'язок задачі творення та удосконалення моделі

А. Аспекти застосування критерію адекватності

Для об'єкту $Y(\bar{X})$ розглянемо задачу побудови моделі $F(\bar{X})$, шляхом апроксимації, за умов наближень з урахуванням похідних порядку k. Відповідно до нижньої границі критерію адекватності запишемо:

$$E = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{1+k_{ji\,max}} \frac{1}{\left(\frac{\delta_j}{F^{(j)}(\bar{X}, \|A\|)_j} \right)^2_{середнє}} P_{mj} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{N_{i\,max}} \left(1 + k_{mji\,max}\right) \frac{N_{mijmax}}{N} \frac{\frac{\partial F^{(j)}(\bar{X}, \|A\|)}{\partial x_i} \Delta x_i}{N_{mi\,max} F^{(j)}(\bar{X}, \|A\|)_{j\,max}}$$

, де E - значення критерію адекватності, $F(\bar{X}, \|A\|)$ - формалізований запис моделі від вектору факторів впливу $\bar{X}$ та параметрів, що умовно позначено матрицею $\|A\|$, $F(\bar{X}, \|A\|)_{max}$ - величина найбільшого значення моделі, а δ_j - локальне відхилення моделі від експериментальних значень, P_{mj} - довірча ймовірність яка задається як результат виконання технології моделювання або оцінюється за результатом оцінки величини довірчого інтервалу у точці m, а $k_{mji\,max}$ максимальне значення j - порядку похідної для i компоненти вектору $\overline{X}$, $N_{mijm\,ax}$ є максимальне значення кількості компонент, що розглядається із N компонент вектору $\overline{X}$. Для спрощення викладу далі розглядатиме тільки одно компонентний вектор $\overline{X}$, та позначимо його просто x . За цих умов сформулюємо та доведемо теорему.

Теорема. Якщо на множині значень $x_m \in X$, $m = \overline{1,M}$, для множини характеристик властивостей об'єкту $Y\left(x_m\right)$, що описуються набором дійсних чисел, виконуються умови рівності $Y\left(x_m\right) - F\left(x_m\right) = 0, Y'\left(x_i\right) - F'\left(x_i\right) = 0,$

$\left[Y''(x) - F''(x)\right] = 0$,

а також

$$\frac{\left[Y''(x) - F''(x)\right]}{\left[Y(x) - F(x)\right]} \geq \frac{Y''(x)}{Y(x)}, \tag{1}$$

то така модель максимізує значення показника адекватності.

Доведення. Подамо показник адекватності тільки за одним функціональним впливом даних про поведінку об'єкту $Y\left(x_m\right)$ та моделі $F\left(x_m\right)$ у вигляді

$$A\left(x_m\right) = const\left(\frac{Y\left(x_m\right) - F\left(x_m\right)}{Y\left(x_m\right)}\right)^{-2}. \tag{2}$$

Максимізація співвідношення (2) еквівалентна мінімізації виразу, що стоїть у дужках знаменника, тоді необхідна умова мінімуму представиться за умов неперервності $F(x)$:

$$\frac{\left\{\begin{matrix}\left[Y'(x) - F'(x)\right]Y(x) - \\ -\left[Y(x) - F(x)\right]Y'(x)\end{matrix}\right\}}{Y(x)^2} = 0 \tag{3}$$

Рівняння (3) можна задовольнити за декількох умов

$$\frac{\left[Y'(x) - F'(x)\right]}{\left[Y(x) - F(x)\right]} = \frac{Y'(x)}{Y(x)} \tag{4}$$

або для будь-яких властивостей об'єкту чисельник рівняння (3) дорівнює нулю, якщо

$$\begin{cases}\left[Y'(x) - F'(x)\right] = 0, \\ \left[Y(x) - F(x)\right] = 0,\end{cases} \tag{5}$$

що еквівалентно

$$\frac{Y'(x)}{Y(x)} - \frac{F'(x)}{F(x)} = 0.$$

А отже, якщо виконується (5), тобто умови теореми, то виконується необхідна умова максимуму адекватності. Достатня умова максимуму адекватності виконується, якщо виконується достатня умова для мінімуму знаменника виразу адекватності (2). Диференціюючи (3) запишемо

$$\frac{\left\langle\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}\left[Y''(x) - F''(x)\right]Y(x) - \\ -\left[Y(x) - F(x)\right]Y''(x)\end{matrix}\right\}Y^2(x) - \\ -2Y'(x)Y(x)\left\{\begin{matrix}\left[Y'(x) - F'(x)\right]Y(x) - \\ -\left[Y(x) - F(x)\right]Y'(x)\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right\rangle}{Y(x)^4} \geq 0.$$

Оскільки $Y(x)^4 \geq 0$, то чисельник задовольняє вимозі

$$\left\{\begin{matrix}\left[Y''(x) - F''(x)\right]Y(x) - \\ -\left[Y(x) - F(x)\right]Y''(x)\end{matrix}\right\}Y^2(x) \geq$$

$$\geq 2Y(x)Y'(x)\left\{\begin{matrix}\left[Y'(x) - F'(x)\right]Y(x) - \\ -\left[Y(x) - F(x)\right]Y'(x)\end{matrix}\right\} \tag{6}$$

Останнє з урахуванням необхідної умови (3) та невід'ємності $Y^2(x)$ перепишеться:

$$\left\{\left[Y''(x) - F''(x)\right]Y(x) - \left[Y(x) - F(x)\right]Y''(x)\right\} \geq 0$$

або

$$\frac{\left[Y''(x) - F''(x)\right]}{\left[Y(x) - F(x)\right]} \geq \frac{Y''(x)}{Y(x)}$$

або

$$\frac{F''(x)}{F(x)} \geq \frac{Y''(x)}{Y(x)}$$

або

$$\left[Y''(x) - F''(x)\right] = 0.$$

Тому, якщо друга похідна функції апроксимована з відносною похибкою

$$\varepsilon(x)=\frac{Y''(x)-F''(x)}{Y''(x)},$$

то сама функцію буде мати мінімум похибки або максимум адекватності за умов

$$\frac{\left[Y(x)-F(x)\right]}{Y(x)}\le\frac{\left[Y''(x)-F''(x)\right]}{Y''(x)}$$

або

$$\frac{\left[Y(x)-F(x)\right]}{Y(x)}\le\varepsilon(x),$$

тобто коли відносна похибка апроксимації функції є меншою у кожній точці за величину відносної похибки апроксимації другої похідної. Таким чином, умови теореми, що максимізують адекватність, забезпечують виконання необхідної та достатньої умови.

B. Розв'язок та обговорення результатів

Припустимо, що об'єкт задано як неперервну функцію, для якої існують три перші похідні. Введемо абсолютну похибку i - того порядку де i пробігає цілі значення від нуля до n :

$$E^{(i)}=Y^{(i)}-F^{(i)};\left\|E^{(i)}\right\|=\left(\int_0^b E^{(i)}E^{(i)}dx\right)^{1/2},$$

тоді необхідна умова екстремуму адекватності (3)-(5) переформулюється наступним чином: Адекватність набуває свого екстремального значення, якщо функція, що апроксимує об'єкт та її перша похідна мають нульову похибку або відношення похідної до самої функції еквівалентно аналогічному відношенню об'єкту на усьому проміжку апроксимації. Достатня умова (6) сформулюється наступним чином: Адекватність набуває свого максимального значення, якщо похибка функції всюди на проміжку апроксимації менше за похибку другої похідної. Крім того, умова (6) перепишеться наступним чином:

$$\begin{gathered}\left\{E^{(2)}Y(x)-E^{(0)}Y''(x)\right\}Y^2(x)-\\-2Y'(x)Y(x)\left\{E^{(1)}Y(x)-E^{(0)}Y'(x)\right\}\ge 0\end{gathered}. \quad (7)$$

Знак рівності у необхідній умові (7) формує рівняння, розв'язок якого формує поверхню, що розділяє простір значень у області визначення моделі на два півпросторі, тобто поверхню інверсії, над якою існує види моделі, що забезпечують максимум адекватності, а під якою ні. Припустимо, що умова (7) є на проміжку апроксимації диференційованою по Фреше та розкладемо ліву її частину відповідно до методу рекурентної апроксимації [29] у ряд обмежуючись двома членами розкладу:

$$\begin{gathered}G_n(x)+\left[Y^2(x)Y''(x)-2Y'(x)^2Y(x)\right]\Delta F_n(x)+\\+2Y'(x)Y^2(x)\Delta F'_n(x)-Y^3(x)\Delta F''_n(x)\ge 0;\end{gathered}$$

де введено позначення

$$G_n(x)=\left.\left\{\begin{gathered}\left[\begin{gathered}E^{(2)}Y(x)-\\-E^{(0)}Y''(x)\end{gathered}\right]Y^2(x)-\\-2Y'(x)Y(x)\left[\begin{gathered}E^{(1)}Y(x)-\\-E^{(0)}Y'(x)\end{gathered}\right]\end{gathered}\right\}\right|_{\substack{F(x)=\\=F_n(x)}}.$$

За таких умов уточнене значення функції, що забезпечує максимум адекватності може бути записане з урахуванням розкладу у вигляді рекурентної послідовності:

$$\begin{gathered}F_{n+1}(x)=F_n(x)-\\-\frac{\left[\begin{gathered}2Y'(x)Y^2(x)\Delta F'_n(x)-\\-Y^3(x)\Delta F''_n(x)+G_n(x)\end{gathered}\right]}{\left[Y^2(x)Y''(x)-2Y'(x)^2Y(x)\right]}.\end{gathered} \quad (8)$$

Доведемо її існування, обмеженість, збіжність. Припустимо, що апроксимуюча функція та її перша і друга похідна як і об'єкт є обмеженими функціями для яких виконується

$$\max_{x\le b}\max\left(\begin{gathered}\left|F_n(x)\right|,\left|bF'_n(x)\right|,\\\left|b^2F''_n(x)\right|\end{gathered}\right)=\lambda; \quad (9)$$

$$\max_{x\le b}\max\left(\begin{gathered}\left|Y(x)\right|,\left|bY'(x)\right|,\\\left|b^2Y''(x)\right|\end{gathered}\right)=\eta, \quad (10)$$

$$\lambda_1=\max_{0\le x\le b}\max\left(\begin{gathered}\left|F_{n+1}(x)\right|,\left|bF'_{n+1}(x)\right|,\\\left|b^2F''_{n+1}(x)\right|\end{gathered}\right), \quad (11)$$

де позначено

$$b=\frac{x_{m+1}-x_m}{\left|x_{m+1},x_m\right|_{\max}}.$$

З урахуванням припущення про існування $F_n(x)$ - попереднього значення виразу моделі разом із двома її похідними, на підставі аналізу виразу послідовності, стверджуємо, що наступне наближення існує за умов, коли у кожній точці області визначення знаменник виразу (8) не дорівнює нулю. Тепер для доведення обмеженності застосуємо до виразу (8) норму та з урахуванням її властивостей і позначень (9)-(11) запишемо

$$\left|\lambda_1-\lambda\right| \leq \frac{3\left\|E^{(0)}\right\|+2b\left\|E^{(1)}\right\|+b^2\left\|E^{(2)}\right\|}{4}. \quad (12)$$

Останнє свідчить, що члени послідовності є обмеженими та існують, якщо величина проміжку b визначається похибкою апроксимації та задовольняє нерівності (12). Останнє відношення перепишемо, якщо позначимо найбільше значення модуля похибки:

$$\max_{x\leq b} max\left(\left\|E^{(0)}\right\|,\left\|E^{(1)}\right\|,\left\|E^{(2)}\right\|\right)=\rho,$$

$$\frac{\left|\lambda_1-\lambda\right|}{\rho}\leq\frac{3+2b+b^2}{4}\leq 1,$$

ліва частина цієї нерівності є обмеженою у випадку, коли її права частина менше за одиницю. Таким чином, якщо накласти обмеження на інтервал між двома сусідніми точками аргументу при апроксимації, то різниця між двома послідовними апроксимаціями менше за величину похибки та крім того, є обмеженою за умов вибору величини інтервалу із проміжку

$$-\sqrt{2}-1\leq b<\sqrt{2}-1.$$

Останній також може бути визначеним за умов наперед заданої величини ε - відносного відхилення, тобто відношення різниці між двома наближеннями до величини оцінки похибки:

$$\frac{\left|\lambda_1-\lambda\right|}{\rho}\leq\frac{3+2b+b^2}{4}\leq\varepsilon, \quad (13)$$

$$-1-\sqrt{4\varepsilon-2}\leq b\leq -1+\sqrt{4\varepsilon-2}$$

Виходячи із вимоги позитивності підкореневого виразу на величину ε також накладається обмеження:

$$\frac{1}{2}<\varepsilon<1\,.$$

Збіжність послідовності доведемо подаючи n - не наближення функції $F(x)$ через $n-1$:

$$F_n(x)=F_{n-1}(x)-\frac{\left[\begin{array}{l}2Y'(x)Y^2(x)\Delta F'_{n-1}(x)-\\-Y^3(x)\Delta F''_{n-1}(x)+G_{n-1}(x)\end{array}\right]}{\left[Y^2(x)Y''(x)-2Y'(x)^2Y(x)\right]}$$

Тоді різниця двох послідовних наближень дорівнює:

$$F_{n+1}(x)-F_n(x)=F_n(x)-F_{n-1}(x)-\frac{\left[\begin{array}{l}2Y'(x)Y^2(x)\left[\Delta F'_n(x)-\Delta F'_{n-1}(x)\right]\\-Y^3(x)\left[\Delta F''_n(x)-\Delta F''_{n-1}(x)\right]+\\+\left[G_n(x)-G_{n-1}(x)\right]\end{array}\right]}{\left[Y^2(x)Y''(x)-2Y'(x)^2Y(x)\right]}.$$

Таким чином, якщо у просторі політик вдається здійснити підбір функцій задовольняючи нерівність, то рекурентна послідовність зменшує різницю двох послідовних наближень, за умов диференційовності опису об'єкту та функції разом із її першою та другою похідною, якою об'єкт апроксимується, а також постійності знаку, який має дріб :

$$\left|F_n(x)-F_{n-1}(x)\right|-\left|\frac{\left[\begin{array}{l}2Y'(x)Y^2(x)\left[\Delta F'_n(x)-\Delta F'_{n-1}(x)\right]\\-Y^3(x)\left[\Delta F''_n(x)-\Delta F''_{n-1}(x)\right]+\\+\left[G_n(x)-G_{n-1}(x)\right]\end{array}\right]}{\left[Y^2(x)Y''(x)-2Y'(x)^2Y(x)\right]}\right|\leq$$

$$\leq\left|F_{n+1}(x)-F_n(x)\right|\leq\left|F_n(x)-F_{n-1}(x)\right|+\left|\frac{\left[\begin{array}{l}2Y'(x)Y^2(x)\left[\Delta F'_n(x)-\Delta F'_{n-1}(x)\right]\\-Y^3(x)\left[\Delta F''_n(x)-\Delta F''_{n-1}(x)\right]+\\+\left[G_n(x)-G_{n-1}(x)\right]\end{array}\right]}{\left[Y^2(x)Y''(x)-2Y'(x)^2Y(x)\right]}\right|.$$

Скориставшись граничним значенням відносного відхилення (12), застосовуючи норму та її властивості, запишемо:

$$\left|F_n(x)-F_{n-1}(x)\right|\times$$
$$\times\left|\frac{\rho_{n-1}\left(3+2b+b^2\right)\left(1-\dfrac{\rho_{n-2}}{\rho_{n-1}}\right)}{4}-2\right|\le$$
$$\le\left|F_{n+1}(x)-F_n(x)\right|\le$$
$$\le\left|F_n(x)-F_{n-1}(x)\right|\times \quad .$$
$$\times\left|4+\frac{\rho_{n-1}\left(3+2b+b^2\right)\left(1-\dfrac{\rho_{n-2}}{\rho_{n-1}}\right)}{4}\right|$$

Після відповідного добору значень інтервалу запишемо наприклад для третього наближення:

$$\left|\frac{\left(3+2b+b^2\right)}{4}\rho_2\right|\times$$
$$\times\left|\frac{\rho_2\left(3+2b+b^2\right)\left(1-\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)}{4}-2\right|\le$$
$$\le\left|F_3(x)-F_2(x)\right|\le$$
$$\le\left|\frac{\left(3+2b+b^2\right)}{4}\rho_2\right|\times$$
$$\times\left|4+\frac{\rho_2\left(3+2b+b^2\right)\left(1-\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)}{4}\right|;$$
$$\left|F_2(x)-F_1(x)\right|\le\left|\frac{\left(3+2b+b^2\right)}{4}\rho_1\right|.$$

За аналогією, скориставшись граничним значенням відносного відхилення (13) можливо отримати відношення такого типу, що демонструють швидкість збіжності послідовності, яка забезпечує максимум адекватності під час формування або удосконалення моделі. Таким чином, не використовуючи схему доведення збіжності [9] або [10], в силу спеціального добору інтервалу апроксимації забезпечується величина множника, значить і збіжність послідовності. Крім того, слід зазначити, що розглянуті умови максимуму адекватності, що у свою чергу еквівалентно мінімуму будь якої з норм похибки [9,14], формалізують процес побудови або удосконалення виразу моделі, а разом із аналізом величин інтервалів апроксимації, що обираються за спеціальних умов та множників, забезпечується точність та збіжність такого алгоритму перетворення бази даних у базу знань.

ВИСНОВКИ

1. Адекватність набуває свого максимального значення, якщо функція, що апроксимує об'єкт та її перша похідна мають нульову похибку або відношення похідної до самої функції еквівалентно аналогічному відношенню для об'єкту на усьому проміжку апроксимації, а також якщо похибка функції всюди на проміжку апроксимації менше за похибку другої похідної.

2.Адекватність набуває свого максимального значення, якщо функція, що апроксимує об'єкт та її перша і друга похідна одночасно мають нульову похибку або відношення їх похідної до самої функції еквівалентно аналогічному відношенню для об'єкту на усьому проміжку апроксимації або стратегії політик знаходяться у просторі над поверхнею інверсії.

3. Оцінка збіжності послідовності доводиться для кожного виду об'єкту та обраної стратегії політик за схемою постійного знаку на інтервалі апроксимації, а у випадку її існування утворює алгоритм побудови або удосконалення математичної моделі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Petrov E. G. Sintez modeli prinyatiya investitsionnykh resheniy v usloviyakh mnogokriterial'nosti / E. G. Petrov, N.A. Brynza // Problemi Informatsiynikh tekhnologiy, №02(014) gruden' 2013, S. 6-9
2. Solodovnikov V.V. Sintez korrektiruyushchikh ustroystv sledyashchikh sistem pri tipovykh vozdeystviyakh. // Avtomatika i telemekhanika –1951. – № 5. – S. 352-388.

3. Payerls R. Postroenie fizicheskikh modeley // Uspekhi fizicheskikh nauk. – 1983. – № 6. – T. 140. – S. 315-332.
4. Kryuchkovskiy V.V. Informativnaya predpochtitelnost statisticheskoy formy predstavleniya iskhodnykh dannykh v usloviyakh intervalnoy neopredelennosti / V.V. Kryuchkovskiy, E.G. Petrov, N.A. Brynza // St. Petersburg state polytechnical university journal "Computer science. Telecommunications and control systems". - 2010. - №4 (103). - P.11-18.
5. Khodakov V. E. Kharakternye osobennosti odnogo klassa sotsial'no-ekonomicheskikh sistem / V. E. Khodakov, A. K. Vezumskiy // Problemi Informatsiynikh, №2(014) gruden' 2013, S. 10-14
6. Gubarenko G.V. Modeli i metody upravlenija ustojchivym razvitiem social'no-jekonomicheskih sistem /G.V. Gubarenko, A.O. Ovezgel'diev, E.G. Petrov – Kherson: Iz-vo Grin', 2013 – 252 s.
7. Petrov K.E. Komparatornaya strukturno-parametricheskaya identifikatsiya modeley skalyarnogo mnogofaktornogo otsenivaniya: Monografiya / K.E. Petrov, V.V. Kryuchkovskiy. – Kherson: Oldi-plyus, 2009. – 294 s.
8. Bardachev Yu.N. Metodologicheskaya predpochtitel'nost' interval'nykh ekspertnykh otsenok pri prinyatii resheniy v usloviyakh neopredelennosti / Yu.N. Bardachev, V.V. Kryuchkovs'kiy, T.V. Malomuzh // Visnik Kharkivs'kogo natsional'nogo universitetu. – 2010. – №890. – S. 18-28.
9. Trunov A.N. Rekurentna aproksimatsiya u zadachakh modelyuvannya ta proektuvannya / O.M. Trunov //: Monografiya. Mikolaïv, 2012. – 270 s.
10. Trunov A.N. Intellectualization of the models' transformation process to the recurrent sequence, European Applied Sciences, Ort Publishing, №9 – 2013, vol. 1, P.123-130.
11. Popov B. A., Malachivskiy P. S. Nailuchshie chebyshevskie priblizheniya summoy mnogochlena i nelineynykh funktsiy. – L'vov, 1984. – 70 s. – (Prepr. / AN USSR Fiziko-mekh. in-t im. G. V. Karpenko; № 85).
12. Vorobel' R. A., Popov B. A. Ravnomernoe priblizhenie eksponentsial'nymi i stepennymi vyrazheniyami s usloviem // Algoritmy i programmy dlya vychisleniya funktsiy na ETsVM. – K.: In-t kibernetiki AN USSR, 1981. – Vyp. 5, chast' 1. – S. 158-170.
13. Trunov O.M. Kriteriy adekvatnosti yak otsinka
14. fektivnosti protsesu pobudovi modeli/ A.N.Trunov // Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy. Matematika i Kibernetika prikladnye aspekty – 1/4(73) –Khar'kov, 2015. – S. 36-41.
15. Tesler G.S. Postroenie bazy znaniy na osnove porozhdayushchikh algoritmov // Razrabotka i vnedrenie tsifrovykh vychislitel'nykh kompleksov i sistem raspredelennoy obrabotki dannykh. Sb. nauchn. trudov. – Kiev: In-t kibernetiki AN USSR, 1986. – S. 21-27.